GUIA DE ESTUDIO

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Se llama **FUNCION POLINOMICA DE SEGUNDO GRADO** o **FUNCION CUADRÁTICA** a la función:

$$\boxed{f: R \to R \qquad f(x) = ax^2 + bx + c} \qquad a \neq 0 \text{ y } a, b, c \in R$$

El término ax^2 se denomina *término cuadrático*, el término bx es el *término lineal* y c es el *término independiente*.

Ejemplos: a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = 3x^2 - 4x$ c) $f(x) = x^2 - 1$

La forma de expresión vista se llama ***forma polinómica***.

La representación gráfica de una función cuadrática es una ***parábola.***

La función cuadrática tiene otras dos formas de expresión, además de la polinómica:

- ✓ La ***forma canónica*** tiene en cuenta los parámetros a, h, k

$$\boxed{f(x) = a(x-h)^2 + k} \qquad a \neq 0 \text{ y } a, h, k \in R$$

Ejemplos: a) $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$ b) $f(x) = -(x-1)^2$ c) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1$

La $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ es la ***forma factorizada o factoreada*** en la cual x_1 , x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente a la función dada. (también vimos este tema en 3er Año)

- ✓ La ***forma factorizada o factoreada*** en la cual x_1 , x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente a la función dada y se obtienen aplicando la fórmula resolvente.

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Fórmula resolvente: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- ➢ **ECUACIONES DE 2°GRADO:**

Se denominan ***ecuaciones cuadráticas*** o ***ecuaciones de 2°grado***, a las ecuaciones que pueden reducirse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$

Resolver una ecuación de 2°grado significa hallar las raíces de la función cuadrática asociada.

Por lo tanto, para averiguar las raíces de una función cuadrática, cuando la misma está expresada en forma polinómica, o para resolver la ecuación de 2°grado asociada a ella, es decir, para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ se utiliza la

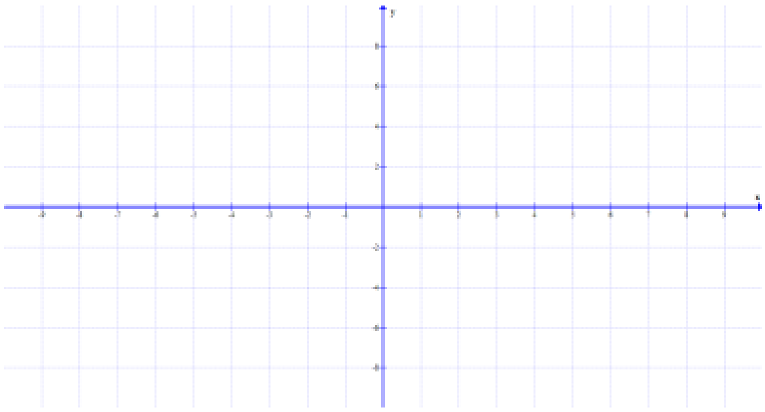
Fórmula resolvente: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (que ya vimos en 3er Año al factorizar el trinomio de 2do grado)

ANÁLISIS Y GRÁFICO DE LA FUNCION CUADRÁTICA

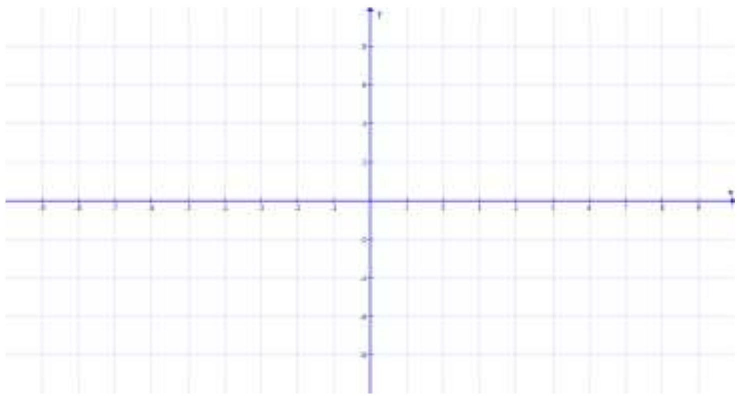
Se realiza el análisis de una función cuadrática para luego poder graficarla, para ello utilizaremos la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Las expresiones polinómica y factorizada se pueden expresar en forma canónica y luego se procede a graficar.

Se denomina PARÁBOLA MATRIZ a la parábola de la forma $f(x) = x^2$ en la cual $a =$ …….. , $h =$ …….. , $k =$ ……..

Graficamos



Ahora graficamos: $f(x) = -x^2$ en la cual $a =$ …….. , $h =$ …….. , $k =$ ……..



Cada parábola presenta un *eje de simetría vertical* y sobre él un punto llamado *vértice* de la parábola. El vértice se identifica con dos coordenadas: x_v = abscisa del vértice e y_v = ordenada del vértice. En símbolos:

$V = (x_v\,;\ y_v)$ o también $V = (x_v\,;\ f(x_v)\ )$.

El eje de simetría es la recta $x = x_v$

- a) *<u>Influencia de a</u>*: "a" está relacionada con………………………………………………………………………
  y además nos indica ………………………………………………………………………………………..

- Si $|a| > 1$ ………
- Si $|a| < 1$ ………
- Si $a > 0$ ………
- Si $a < 0$ ………

- b) *<u>Influencia de h</u>*:

- Si $h > 0$ ………
- Si $h < 0$ ………

<u>Conclusión</u>: h es responsable del ……………………………………………………………………………………… y su valor coincide con …………………………………………………………………….

➢ c) *<u>Influencia de k</u>*:

- Si $k > 0$ ………
- Si $k < 0$ ………

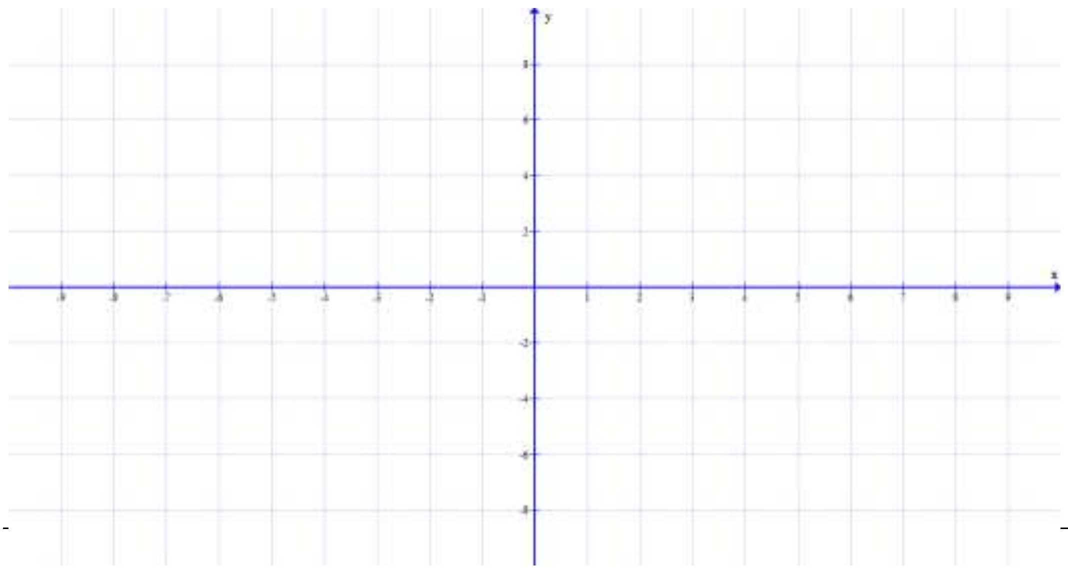
<u>Conclusión</u>: k es responsable del ……………………………………………………………………………………… y su valor coincide con …………………………………………………………………….

- *<u>Ejercicio</u>*: Analizamos (sin graficar) y comparando con la parábola matriz, la siguiente función cuadrática : $f(x) = -\frac{4}{9}(x+2)^2 + 1$, completando:

- Dominio: .... Imagen: ....
- Abertura: .... Derecha/Invertida: ....
- Desplazamiento lateral: ....
- Desplazamiento vertical: ....
- Coordenadas del vértice: .... Vértice (máx/mín): ....
- Ecuación del eje de simetría: ....
- Intersección con el eje X : ....
- Intersección con el eje Y : ....

<u>Recuerda</u>: los dos últimos puntos se calculan analíticamente de la siguiente forma:

1) Intersección con el eje X (Cálculo de las raíces o ceros de la función): son los valores de “x” para los cuales $f(x) = 0$.
2) Intersección con el eje Y (Cálculo de la ordenada al origen): son los puntos de “y” para los cuales $x = 0$, es decir hay que calcular $f(0)$



NOTA IMPORTANTE: Cuando la función cuadrática está expresada en *forma polinómica*, es decir, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se pueden calcular *h* y k con las fórmulas $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f(h)$ y luego expresar así la función en *forma canónica* $f(x) = a(x-h)^2 + k$

- ✓ **DISCRIMINANTE DE LA ECUACIÓN DE 2°GRADO:**

Para resolver una ecuación de 2°grado se utiliza la fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Al radicando $b^2 - 4ac$ se lo denomina ***discriminante*** de la ecuación de 2°grado ya que el valor del mismo sirve para discriminar la naturaleza de las raíces. Se simboliza Δ , es decir, $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, la función tiene 2 raíces reales distintas. (Su gráfica corta al eje X en 2 puntos)
Si $\Delta = 0$, la función tiene raíces reales iguales o coincidentes , también se dice que tiene una raíz doble. (Su gráfica tiene un punto de intersección con el eje X)
Si $\Delta < 0$, la función tiene raíces que son complejos conjugados. (Su gráfica no corta al eje X)

Ejercicio de aplicación: Calcular el valor de "k" para que la ecuación $2x^2 + \frac{1}{2}x + k - 3 = 0$ tenga raíz doble.
Aplicamos la condición de raíz doble: ………………………………………………….
Despejamos el valor de "k" : …………………………………………………………………..
(Se puede hacer la comprobación correspondiente)

- ✓ **PROPIEDADES DE LAS RAICES**

Las raíces x_1 , x_2 de una función cuadrática se relacionan con los coeficientes a, b, c de su forma polinómica mediante las siguientes propiedades:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (suma de las raíces)

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$ (producto de las raíces)

Con estas expresiones se puede reconstruir la ecuación de 2°grado.

Ejemplo: Reconstruye la ecuación de 2°grado que tiene por raíces: $x_1 = -\frac{3}{4}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$ y el coeficiente del término cuadrático es 5
Aplicamos la propiedad de la suma $x_1 + x_2 =$ …………………………=
Aplicamos la propiedad del producto $x_1 . x_2 =$ …………………………=
Reemplazando el valor de …………………….. , se obtiene que $b =$ ………………… y $c =$ ……………………..
Con lo cual la ecuación reconstruida es : ……………………………………………………………….

- ✓ **ECUACIONES BICUADRADAS**

Se llama ***ecuación bicuadrada*** a una ecuación del tipo: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe hacer la sustitución: $z = x^2$ con lo cual la expresión anterior puede escribirse: $az^2 + bz + c = 0$. Como ésta es una ecuación de 2°grado en z , se resuelve aplicando la fórmula resolvente y sus raíces serán: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
De esta manera, calculo z , y luego debo utilizar $x^2 = z$, obteniendo así los valores de "x" que resuelven la ecuación

- Ejemplo: Resolver la ecuación : $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

Hacemos la sustitución $z = x^2$, con lo cual la ecuación bicuadrada se transforma en la ecuación cuadrática: ……………………………………………………………………………

Calculamos las raíces, obteniéndose $z_1 =$ …………………… $z_2 =$ …………………

Teniendo en cuenta la sustitución : $x^2 = z$

Tendríamos $x^2 = z_1 \Rightarrow x^2 =$ ……………………..

Entonces: ……………………………………………………………

Procedemos de la misma manera con la otra raíz: $x^2 = z_2 \Rightarrow x^2 =$ …………………

Entonces: ……………………………………………………………………

El conjunto solución es: $S = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\}$

✓ **SISTEMAS DE ECUACIONES :**

Resolver *analíticamente* un sistema de ecuaciones significa encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente las ecuaciones del sistema.

Resolver *gráficamente* un sistema de ecuaciones significa encontrar los puntos de intersección de ambos gráficos.
El sistema se puede resolver por el *método de igualación o de sustitución*.

Sistema formado por una recta y una parábola: $\begin{cases} y = mx + d \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

Si se obtienen 2 puntos de intersección, se dice que la recta es *secante* a la parábola, un punto de intersección la recta es *tangente* a la parábola, ningún punto de intersección, la recta es *exterior* a la parábola.

Sistema formado por dos parábolas: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + f \end{cases}$

Las parábolas pueden tener 2 puntos de intersección, un punto de intersección o ningún punto de intersección.

- Ejemplo 1: Resuelve el siguiente sistema analítica y gráficamente: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^2 - x + 5 \end{cases}$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene: …………………………………………………………

De ahí, se llega a la ecuación de 2do grado: ……………………………………………………

Al resolver la ecuación, se obtiene:

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

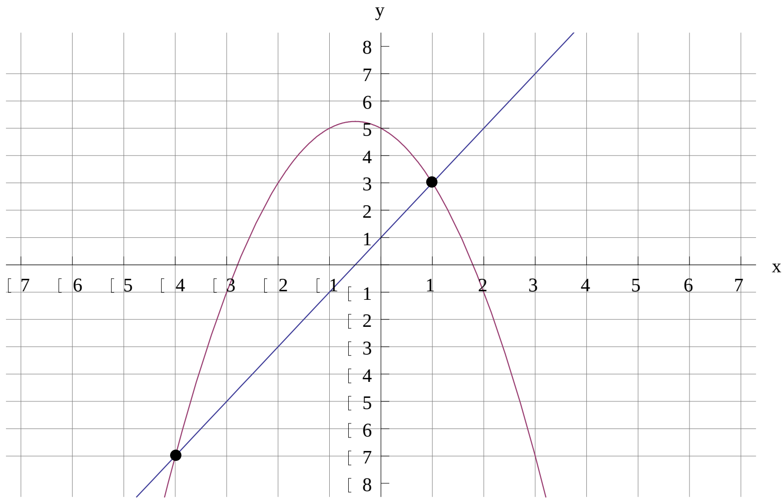
El conjunto solución es : $S =$

$\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$

De ahí se deduce que la recta es

……………………………. a la parábola

Al realizar el gráfico se obtiene:



- Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema analítica y gráficamente: $\begin{cases} y = 3x^2 + 2x + 1 \\ y = x^2 + x - 4 \end{cases}$

Aplicando el método de igualación se obtiene: ………………………………………………………

De ahí, se llega a la ecuación de 2do grado: …………………………………………………

Al resolver la ecuación, se obtiene: $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

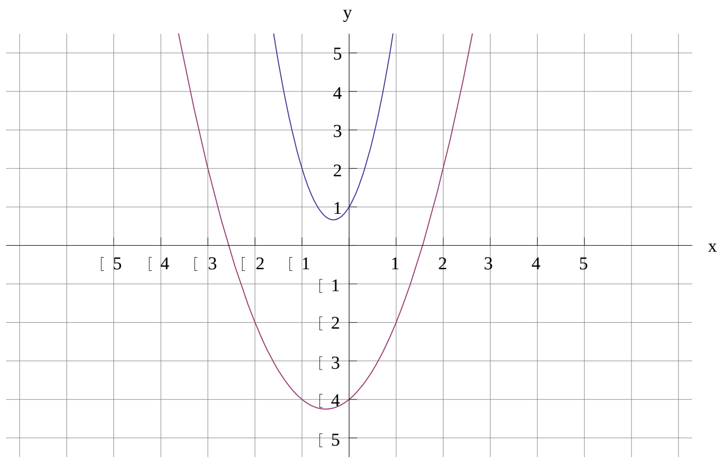
El conjunto solución es :

$S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$

De ahí se deduce que las parábolas

………………………………………………………………..

Al realizar el gráfico se obtiene:



✓ **INECUACIONES DE 2°GRADO**

Las expresiones del tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$ $ax^2 + bx + c \leq 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ $ax^2 + bx + c < 0$

donde, en todos los casos, $a \neq 0$, se denominan ***inecuaciones de 2°grado*** o ***inecuaciones cuadráticas*** con una incógnita.

Para resolverlas se debe primero factorear el trinomio de 2°grado (calculando previamente sus raíces) y luego considerar la regla de los signos según la inecuación presentada (trabajo similar al realizado con las inecuaciones racionales, sólo que en este caso se trata del producto)

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \wedge b \geq 0 \to S_1 \\ a \leq 0 \wedge b \leq 0 \to S_2 \end{cases} \qquad a.b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \wedge b \leq 0 \to S_1 \\ a \leq 0 \wedge b \geq 0 \to S_2 \end{cases}$$

En ambos casos, $S_f = S_1 \cup S_2$

También se cumple con $>$ o $<$:

$$a.b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \to S_1 \\ a < 0 \wedge b < 0 \to S_2 \end{cases} \qquad a.b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \wedge b < 0 \to S_1 \\ a < 0 \wedge b > 0 \to S_2 \end{cases}$$

En ambos casos, $S_f = S_1 \cup S_2$

- Ejemplo 1: Resuelve analíticamente a siguiente inecuación y representa el conjunto solución: $x^2 + 2x - 8 < 0$

Calculamos la raíces: $x_1 =$ …………………… $x_2 =$ …………………

Factorizamos el trinomio de 2do grado: …………………………………………………………….

Como la inecuación es menor que 0, entonces analizamos los signos según:

- Ejemplo 2: Resuelve analíticamente a siguiente inecuación y representa el conjunto solución: $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \geq 0$

Calculamos la raíces: $x_1 =$ …………………… $x_2 =$ …………………

Factorizamos el trinomio de 2do grado: …………………………………………………………….

Como la inecuación es mayor o igual que 0, entonces analizamos los signos según:

OBSERVACIÓN: Si el valor de "a" es negativo, no se puede analizar la misma convención de signos. Por lo tanto, en este caso es conveniente multiplicar toda la inecuación por (-1) , invirtiendo el signo de la desigualdad y así se puede aplicar la regla de los signos como vimos en ambos ejemplos.