

GUIA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS N°3

FUNCIONES CUADRATICAS

1) Dadas las siguientes funciones:

- Indica las coordenadas del vértice y ecuación del eje de simetría
- Calcular las raíces y la ordenada al origen
- Grafica indicando dominio e imagen

a) $f(x) = (x - 6)^2$

b) $f(x) = 2(x + 5)^2$

c) $f(x) = 4x^2 - 16x + 12$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $f(x) = -2x^2 - 6x$

f) $f(x) = -x^2 + x - \frac{5}{4}$

g) $f(x) = 4(x - 1)^2 + 1$

h) $f(x) = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 4$

2) Expresar en forma factorizada y en forma canónica las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = 2x^2 - 5x - 7$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{8}{3}$

d) $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$

Respuestas: a) $f(x) = (x - 3) \cdot (x - 1)$; b) $f(x) = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right)$;

c) $f(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{8}{3}\right) \cdot (x - 3)$; d) $f(x) = -2(x + 2) \cdot (x - 3)$

3) Escribir las siguientes funciones cuadráticas en sus tres formas de expresión, teniendo en cuenta los datos que se dan:

a) $V = (-3; 2)$ y coeficiente principal = -2

b) Raíces $x_1 = -4$ $x_2 = 2$ coeficiente principal = -1

c) $V = (-3; -12)$ y pasa por el punto $(0; -9)$

Respuestas: a) $f(x) = -2x^2 - 12x - 16$ $f(x) = -2(x + 2) \cdot (x + 4)$ $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$;

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ $f(x) = -(x - 2) \cdot (x + 4)$ $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$;

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 9$ $f(x) = \frac{1}{3}(x - 3) \cdot (x + 9)$ $f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - 12$

4) Determinar en forma polinómica y en forma factoreada la función cuadrática que toma su máximo valor 16 para $x = -5$ y una de sus raíces es $x = -1$

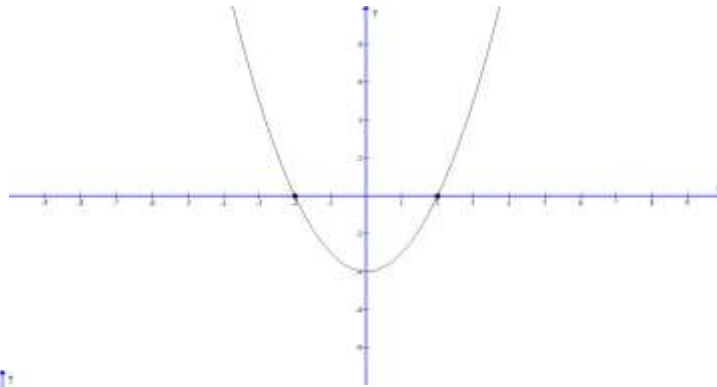
5) Determinar en forma polinómica y en forma factoreada la función cuadrática que tiene por raíces a $x = -1$ y $x = 2$ y además $p = (1; 2) \in f(x)$

6) Determinar en forma polinómica y factorizada la ecuación de la parábola que pasa por los puntos: $a = (-2; 7)$ $b = (2; -1)$ $c = (3; 2)$.

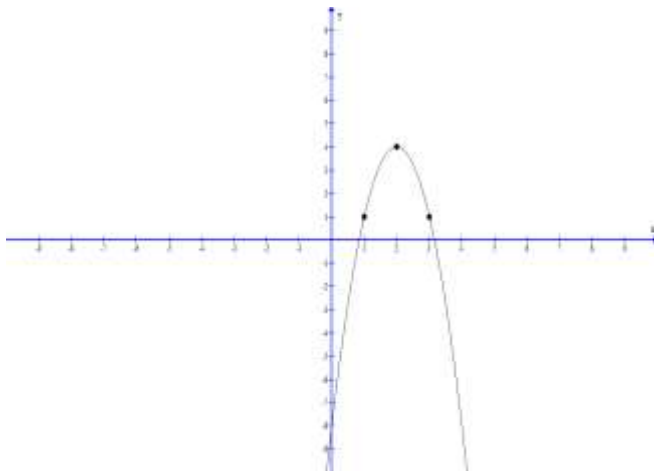
Respuestas: 4) $f(x) = -x^2 - 10x - 9$ $f(x) = -(x + 9) \cdot (x + 1)$; 5) $f(x) = -x^2 + x + 2$
 $f(x) = -(x - 2) \cdot (x + 1)$; 6) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

7) Dadas las siguientes parábolas, determinar la expresión polinómica de cada una:

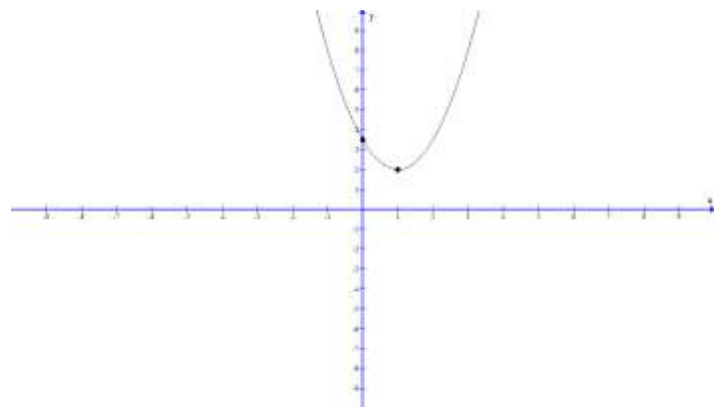
a)



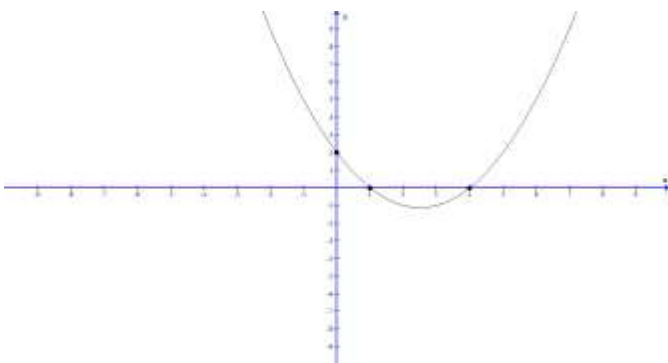
b)



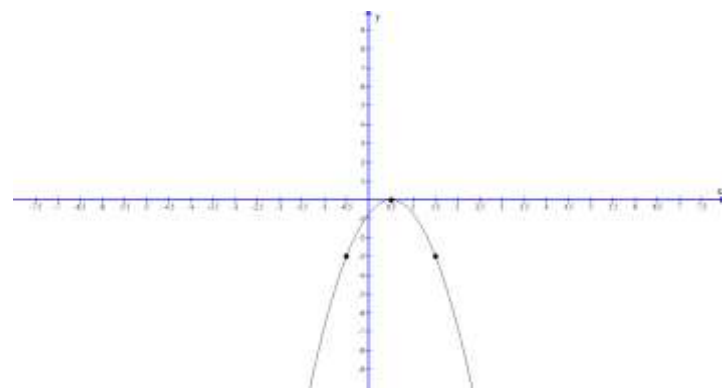
c)



d)



e)



Respuestas: a) $f(x) = x^2 - 4$; b) $f(x) = -3x^2 + 12x - 8$; c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}$;

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$; e) $f(x) = -3x^2 + 3x - \frac{3}{4}$

8) Dadas las siguientes funciones:

A) $f(x) = 7x + x^2$

B) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

C) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

D) $f(x) = 5 - 3x - 2x^2$

¿Cuál de ellas intercepta al eje de las Y por debajo del eje de las X? ¿Cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas? ¿Cuál de ellas no corta al eje de las X? ¿Cuál de ellas pasa por el punto $(-\frac{5}{2}; 0)$?

9) Dadas las siguientes funciones:

A) $f(x) = 4x - x^2$ B) $f(x) = (x - 1)(x + 1)$
 C) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ D) $f(x) = 5 - 3x - 2x^2$ E) $f(x) = 2(x - 1)^2$

¿Cuál de ellas no corta al eje X? ¿Cuál de ellas intercepta la eje de las Y por debajo del eje de las X?
 ¿Cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas? ¿En cuál de ellas el vértice coincide con la raíz?

10) Dadas las siguientes funciones

- Grafica indicando dominio e imagen
- Indica las intersecciones con los ejes coordenados

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

11) Calcular en cada caso el valor de m , para que la ecuación satisfaga la condición:

- a) $2x^2 + \frac{1}{2}x + m = 0$ tenga una raíz doble
 b) $x^2 + x + m = 1$ tenga una raíz nula
 c) $(1 - m)x^2 - x + 4 - m = 0$ tenga por raíz a $x = \frac{1}{2}$
 d) $x^2 - (3x + 1) + m^2 + m - 1 = 0$ tenga una raíz nula
 e) $x^2 - 4x + m - 3 = 0$ tenga raíz doble

Respuestas: a) $\frac{1}{32}$; b) 1; c) 3; d) $1 - 2$; e) 7

12) Reconstruir la ecuación cuadrática dadas las raíces y el coeficiente del término cuadrático:

- a) $x_1 = 5$ $x_2 = -1$ $a = \frac{1}{2}$
 b) $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ $a = 2$
 c) $x_1 = -\frac{1}{2} + 4i$ $x_2 = -\frac{1}{2} - 4i$ $a = 2$
 d) $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$ $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$ $a = 3$

Respuestas: a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$; b) $2x^2 - 12x + 2 = 0$; c) $2x^2 + 2x + \frac{65}{2} = 0$; d) $3x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 0$

13) Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

- a) $x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$ b) $3x^4 - 2x^2 - 5 = 0$
 c) $x^2 - \frac{2}{x^2} = -1$ d) $x^2 \cdot (2 - 3x^2) - 7x^2 = (6 + 2x^2) \cdot (6 - 2x^2)$

Respuestas: a) $S = \{-\sqrt{2}i; \sqrt{2}i; -\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\}$; b) $S = \{-i; i; -\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{3}\}$;
 c) $S = \{-\sqrt{2}i; \sqrt{2}i; -1; 1\}$; d) $S = \{-2i; 2i; -3; 3\}$

14) Resolver gráfica y analíticamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

- a) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x^2 - 2x - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x^2 - 5x + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 3x^2 + 4x - 2 \end{cases}$

$$d) \begin{cases} 4x + y = 0 \\ y - x^2 = 4 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 8 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = -x^2 + x + 4 \end{cases}$$

Respuestas: a) $S = \{(3; 10); (-1; 2)\}$; b) $S = \{(2; 1); (1; 0)\}$; c) $S = \left\{\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right); (1; 5)\right\}$;
d) $S = \{(-2; 8)\}$; e) $S = \{(-1; 3); (4; 8)\}$; f) $S = \{(1; 4); (-2; -2)\}$

15) Determinar la intersección de la parábola $f(x) = -4x^2 + 10x - 6$ con la recta determinada por los puntos $p = (-2; 2)$ y $q = (-5; 4)$.

Respuesta: $S = \left\{\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{9}\right); (1; 0)\right\}$

16) Resolver las siguientes inecuaciones (representar gráficamente el conjunto solución):

$$a) x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$b) \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \geq 0$$

$$c) -2x^2 + 5x \leq 0$$

$$d) x^2 - 3x - 10 < 0$$

$$e) 2x^2 - 8x - 42 \leq 0$$

$$f) 5x^2 - x \leq -3x + 2x^2 + 8$$

Respuestas: a) $S = (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; b) $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$;

c) $S = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$; d) $S = (-2; 5)$; e) $S = [-3; 7]$; f) $S = \left[-2; \frac{4}{3}\right]$

PROBLEMAS: APLICACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS, MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:

1) El rendimiento de nafta R (en km/litro) de un automóvil está relacionado con la velocidad (en km/hora) por la función $R(v) = -\frac{1}{3}v^2 + 60v$ $0 < v < 180$. a) Hallar la velocidad para la cual el rendimiento es máximo; b) Calcular el rendimiento máximo; c) Realiza el gráfico correspondiente indicando dominio e imagen de la situación

2) Una compañía de televisión por cable, de acuerdo a un estudio de mercado, sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de " x " dólares mensuales viene dada por la función: $R(x) = 500(300 - x) \cdot x$ $0 < x < 300$. a) Hallar cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo; b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

3) En una isla se introdujeron 112 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente pero, después de un tiempo, los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció. Suponiendo que el número de venados $N(t)$ a los t años está dado por $N(t) = -t^2 + 22t + 112$ con $t > 0$. a) Realiza el gráfico de la función, indicando dominio e imagen; b) ¿A partir de qué año la población empezó a decrecer? c) ¿Cuál fue el número máximo de venados que hubo en la isla?; d) ¿Se extingue la población? ¿Cuándo ocurre esto? e) ¿Cuántos venados había en la isla antes que se introdujera la cantidad mencionada anteriormente?

4) La potencia de un circuito eléctrico está dado por la ecuación: $W = VI - RI^2$, donde V es el voltaje en voltios, R es la resistencia en ohms, e I es la corriente en amperes. Determina la corriente que produce la máxima potencia para un circuito de 120 voltios con una resistencia de 12 ohms.

5) En una isla se introduce una cierta cantidad de abejas el 1° de Marzo. La siguiente función permite calcular la cantidad de abejas que hay en la isla " x " días después del 1° de Marzo:

$f(x) = -5(x + 20) \cdot (x - 80)$. A) ¿Qué día la población de abejas es mayor? B) ¿Cuál es la mayor cantidad de abejas que hay en la isla? C) ¿Cuántas abejas habrá en la isla el 25 de Abril? D) ¿En qué fecha se extinguen las abejas?

6) En un jardín hay un estanque de 6m x 4m. Se quiere construir un paseo de ancho uniforme alrededor del estanque. a) Escribir una expresión que permita obtener el área del paseo en función del ancho "x" b) Representa la función obtenida; c) ¿Cuál es el ancho del camino si su área es de 144 m²?

7) Un granjero desea construir un corral rectangular. Para ello dispone de 60 m de alambre tejido. a) Hallar las dimensiones de modo que el área sea máxima; b) ¿Cuál es el área máxima?

8) La Sra López desea colocar una cerca de 50 m de longitud alrededor de su jardín rectangular. Sólo necesita cercar 3 lados, ya que el otro es el costado de la casa. A) Escribe una expresión del área del jardín en función del ancho "x" del mismo; b) Si el área es de 200 m², hallar las dimensiones del jardín.

9) Se quiere construir un cantero como indica la figura, donde la división vertical se encuentra en la mitad; para ello se cuenta con 250 m de alambre y se desea utilizarlo todo para bordear el cantero y las divisiones. ¿Cuáles deben ser las medidas para que el área sea máxima?



10) ¿Cuáles son los números enteros que cumplen la condición de que su cuadrado más el duplo de su consecutivo es igual a 677?

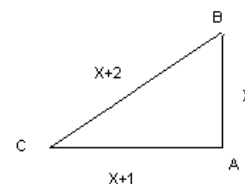
11) La suma de los cuadrados de 3 números naturales y pares consecutivos es 200. ¿Cuáles son esos números?

12) La superficie de un rectángulo es 108 cm². Si un lado es igual a 4/3 del otro. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

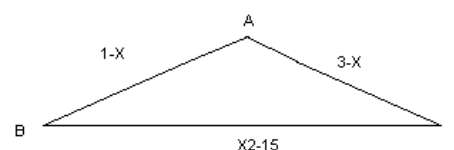
13) Si al triplo de un número se le suma la mitad de su cuadrado, se obtiene el duplo del mismo número. ¿Qué números cumplen esa condición?

14) En un triángulo rectángulo el cateto menor es igual a 3/4 del cateto mayor y es 6 unidades menor que la hipotenusa, calcular los 3 lados del triángulo

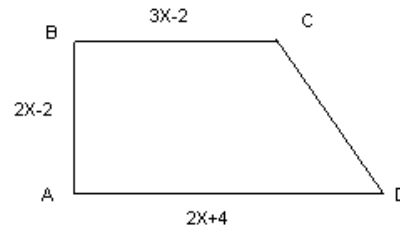
15) a) Calcula x sabiendo que el triángulo es rectángulo en A.
b) Calcula el perímetro y el área



16) El perímetro del triángulo es 24 cm.
Calcula la longitud de cada lado.



17) El área del trapecio es 34. Calcular el perímetro.



18) Un niño arroja una piedra desde una ventana hacia la vereda con una velocidad de 14,7 m/s. Sabiendo que la ventana está a 19,6 m de altura. ¿Cuánto tiempo tardó la piedra en llegar al suelo?

19) ¿Cuál es el tiempo empleado por un móvil animado de MRUA para recorrer 30 km, si parte con una velocidad inicial de 60 cm/s y se mueve con una aceleración de 3 cm/s²?

20) Dos ciclistas A y B parten desde un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. B se desplaza 7 km/h más rápido que A. Después de 3 horas se encuentran a 39 km de distancia uno del otro. Determinar la velocidad de cada uno de ellos.

21) El marco de un cuadro mide 14 cm por 20 cm. En su interior, el cuadro ocupa 160 cm². Calcula el ancho del marco.

22) Un terreno de forma rectangular de 60mx80m es excavado para hacer una pileta de natación en su interior, dejando una franja de pasto de ancho uniforme alrededor de la misma. Si se sabe que el área de la pileta es 1/6 del área del terreno, ¿cuáles son las dimensiones de la pileta?

23) Un terreno rectangular tiene un área de 60 m². La longitud de una de sus diagonales es de 13 m. ¿Cuál es la base y la altura del terreno?

24) La ganancia M (en miles de pesos) de la Empresa Muzzio Propiedades en función del tiempo t (en días) puede representarse con bastante aproximación con la función $m(t) = -4t^2 + 56t - 96$. Por su parte, la ganancia A de la Empresa Antonelli Casas & Campos, competidora de Muzzio, en función del tiempo, se puede obtener por la función $a(t) = -4t + 80$. Estas ganancias fueron medidas a partir de la inauguración de la nueva sede de la Cámara de Guami-ni.

- ¿Qué día logra la empresa Muzzio su máxima ganancia? ¿Cuál es esa ganancia?
- ¿En qué día la ganancia de la empresa Muzzio fue nula?
- ¿En qué días aumenta la ganancia de Muzzio?
- ¿La ganancia de Antonelli es creciente o decreciente?
- ¿En qué día se igualan ambas ganancias? ¿A cuánto ascienden?
- Expresa cada pregunta en términos matemáticos.
- Grafica ambas funciones.

25) Cuando se produce una cantidad "x" (en miles de toneladas) de una cierta mercadería, dos productores reciben un beneficio mensual (en miles de pesos) expresados mediante las siguientes funciones: $p_1(x) = -x^2 + 8x - 3$ y $p_2(x) = 2x - 10$

- ¿Cuántas toneladas deben producir ambos para obtener la misma ganancia?
- Graficar ambas funciones de ganancia en un mismo par de ejes coordenados.

Respuestas a Problemas:

- a) 90km/h ; b) 2700km/l
- a) \$150 ; b) \$11250000

- 3) b) 11 años; c) 233 venados ; d) 26 años 3 meses ; e) 112 venados
- 4) 5 Ampere; Potencia máxima=300 watt
- 5) a) 31/03 ; b) 12500 ; c) 9120 ; d) 19/05 (a los 80 días)
- 6) a) $f(x) = 4x^2 + 20x$; c) 4 m
- 7) a) 15m; b) $225m^2$
- 8) a) $f(x) = 50x - 2x^2$; b) 10m y 20m o 5m y 40m
- 9) 50 cm y 41,67 cm
- 10) 25 y - 27
- 11) 6, 8 y 10
- 12) 9cm y 12cm
- 13) 0 y - 2
- 14) 9cm , 12 cm y 15 cm
- 15) a) 3cm ; b) Perim = 12cm , Area = $6cm^2$
- 16) 6cm, 10cm y 8 cm
- 17) 26 cm
- 18) 1segundo
- 19) 23min14seg
- 20) 5km/h y 12km/h
- 21) 2cm
- 22) 20mx40m
- 23) 5m y 12m